4. Demostrar el siguiente teorema como corolario al teorema 5 del Artículo 63: Las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ son } y = mx \pm a\sqrt{m^2 + 1}.$$

(Véase el ejercicio 16 del grupo 18, Art. 45.)

5. Demostrar que la ecuación de la tangente a la elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2x_1x + b^2y_1y = a^2b^2$.

En cada uno de los ejercicios 6 y 7 hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la tangente, normal, subtangente y subnormal, para la elipse y punto de contacto dados.

6. $2x^2 + 3y^2 = 5$; $(1, -1)$.
7. $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$; $(2, 1)$.

8. Hallar las ecuaciones de las tangentes de pendiente 2 a la elipse $4x^2 + 5y^2 = 8$.

9. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $3x^2+y^2+4x-2y-3=0$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 5 = 0$.

10. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $(3, -1)$ a la elipse $2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0$.

11. Con referencia a la elipse $x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $5x + 2y + k = 0$:

a) cortan a la elipse en dos puntos diferentes;
b) son tangentes a la elipse;
c) no cortan a la elipse.

12. Hallar el ángulo agudo de intersección de las elipses $3x^2 + 4y^2 = 43$ y $4x^2 + y^2 - 32x + 56 = 0$ en uno de sus dos puntos de intersección.

13. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m a la elipse $b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2b^2$ son $y - k = m(x-h) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

14. Demostrar que la ecuación de la normal a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_1(x_1, y_1)$ es $a^2y_1x - b^2x_1y - a^2x_1y_1 + b^2x_1y_1 = 0$.

15. Se tienen como datos una elipse y sus focos. Por medio del teorema 6 (Art. 63) demostrar un procedimiento para construir la tangente y la normal en cualquier punto de la elipse.

16. Demostrar que si cualquier normal a la elipse, excepto sus ejes, pasa por su centro, la elipse es una circunferencia.

17. Demostrar que las tangentes a una elipse trazadas en los extremos de un diámetro son paralelas entre sí.

18. Demostrar que la pendiente de una elipse en cualquiera de los puntos extremos de uno de sus lados rectos es numéricamente igual a su excentricidad.

19. Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una elipse a cualquier tangente es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje menor.

20. Por el punto $(2, 7)$ se trazan tangentes a la elipse

$$2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0.$$

Hallar las coordenadas de los puntos de contacto.